第 18 集　　海洋科学集刊　　No. 18
1981 年 12 月　　STUDIA MARINA SINICA　　Dec., 1981

潮汐分析和预报的准调和分潮方法*

III. 潮流和潮汐分析的一个实际计算过程

方　国　洪
（中国科学院海洋研究所）

在本文第 I 部分我们曾经给出过潮汐准调和分潮的表达式及有关要素的计算方法，在第 II 部分讨论过关于潮汐短期分析的基本原理，并且给出了手工计算的详细过程和格式[1,2]。在这一部分中，我们将详细给出用于电子计算机的关于准调和分潮方法的完整过程。关于计算过程的基本原理已经包含在第 I 和第 II 部分中，这里只是稍作一些改变和补充。

一、关于输入数据

本文主要目的是为潮流分析提供一组较合适的计算公式，同时这组公式也将适用于潮汐分析。对于潮流分析，通常先把实测海流分解为北、东分量，然后分别求其调和常数。而水位观测资料则可以当作海流的一个分量来处理。我们将把水位观测资料看作维数为 1 的资料，海流观测资料则是维数为 2 的资料。但如果海流记录只给出涨落潮的流速，则可作为一维标量来处理。

当前，海流较长期的连续观测资料正在逐渐增加，但仍然比较稀少。通常对一个测站要进行若干次短期连续观测。显然，不同次连续观测期间余流的量值是各不相同的，而且如果一次连续观测时段较长的话，在这个期间内余流也将有明显变化。因此，我们把整个观测资料（称为观测序列）划分为若干个子序列，一次连续观测的时段若不超过一天半，则作为一个子序列，超过一天半，则分为若干组，每组作为一个子序列，它所跨的时段以 24 小时左右为宜。这样，我们可以约略地认为对每一子序列，各有一个余流值。

一个子序列所包含的记录个数以及任意相邻两次观测的时间间隔可以不受限制。

一个子序列，若观测所跨的时段能基本上反映出潮汐或潮流的周日变化情况，就算作主要子序列。显然，主要子序列的观测时段不能太短，一般不得短于 3/4 天。有的子序列虽然首尾两个观测时间相差一天左右，但中间连续缺测太多（例如一天资料中连续缺测 1/4 天以上），则仍然不能反映潮汐或潮流的周日变化情况，就不能算作主要子序列。次要子序列，特别是那些只包含一、二个观测记录的，也可以与主要子序列一起输入进行分析，但它们对改进调和常数的准确度所起的作用不显著。不过最后算得的次要子序列的余流值仍然有一定参考意义（当然，由于观测次数较少，它的余流值的可靠性不如主

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第 507 号。
本刊编辑部收稿日期：1979 年 5 月 29 日。

要子序列)。

在我们给出的公式中还将引入各子序列的权系数。对于次要子序列，因它们对分析结果影响不大，可以不加权。对于主要子序列则有时要考虑权的问题。如果各主要子序列所包含的记录个数 $n^{(i)}$ 相差不大，则可以都不加权。如果有至少一个主要子序列，其记录个数与其余的相差很多，则对于那些记录个数与 24 相差较大的主要子序列都必须加权。例如有三个子序列，前两组都大约有 24 个记录，而第三组的 $n^{(3)} \gg 24$。如果不加权，则在原始的矛盾方程中，属于第三组的方程个数将远多于前两组，就会使得最后的解受到第三组观测值的过份大的影响。为了克服这一点，我们对第三组加上一个较小的权 $w^{(3)} = \sqrt{24/n^{(3)}}$。当然，这样选取并不一定最合适，但比较简单，经验表明这样做一般能得到较好的结果。

在文献 [1] 中曾讨论过准调和分潮的潮龄问题。为了计算方便，我们不对各个准调和分潮取不同的潮龄，而是只考虑最主要的潮龄——视差潮龄。对于半日潮性质的海区，取潮龄 $T = (g_{N_2} - g_{M_2})/(\sigma_{N_2} - \sigma_{M_2})$，对全日潮性质海区，取 $T = (g_{Q_1} - g_{O_1})/(\sigma_{Q_1} - \sigma_{O_1})$。因此，为了给出 T 值，要知道附近长期观测的验潮站的调和常数。对于中国近海，简单地令 $T = 48$ 小时，误差也不会太大。

在下面第三节中要用到同族两个主要分潮的调和常数的差比数 g'_p, H'_p。这些数也要作为已知数据输入，其确定方法可参看文献 [2]。

这样，输入的数据应包括下列各项：

(1) 资料维数。如果要进行分析的观测资料是一维的标量(水位或只有涨落潮流速的海流)，则 $\mathscr{D} = 1$；如果是二维的矢量(海流)，则 $\mathscr{D} = 2$。

(2) 视差潮龄 T (单位：小时) 及同一潮族中两个主要分潮调和常数之间的差比数 g'_1, H'_1, g'_2, H'_2, g'_4, H'_4。

(3) 对于每一子序列给出下列已知数：

(A) 是否属于主要子序列，分别用“1”或“0”表示。

(B) 权系数选择方式。分两种：方式“0”，$w^{(i)} = 1$，即不加权；方式“1”，$w^{(i)} = \sqrt{24/n^{(i)}}$(对主要子序列)或 1 (对次要子序列)。其中上角附标 i 表示第 i 组子序列的相应数值。

(C) 本子序列的观测次数 $n^{(i)}$。

(D) 本子序列第一个观测记录的日期——年份 $y^{(i)}$，月份 $m^{(i)}$，日期 $d^{(i)}$。

(E) 各次观测的时间 $t^{(i,j)}(j = 1, 2, \cdots, n^{(i)})$。第二天时间加 24 小时，第三天(若有的话)时间加 48 小时。

(F) 对应于 $t^{(i,j)}$ 的观测值。对于水位 ($\mathscr{D} = 1$) 给出相应的水位高度 $h^{(i,j)}$，它们相当于后面计算中的 $u^{(i,j)}$；对于海流 ($\mathscr{D} = 2$) 给出相应的流向 $\theta^{(i,j)}$ 和流速 $w^{(i,j)}$[1)]，其中 θ 以度为单位给出，输入后即须化为以弧度为单位。当 $\mathscr{D} = 2$，实测海流的北、东分量按下式计算：

---

1) 这里按一般习惯，权系数和流速都用符号 w 表示。这样做不会导致混乱，因为权系数只与 i 有关，与 j 无关，而流速则与 i, j 都有关，故从右上角的附标即可区别。

$$\begin{cases} u^{(i,j)} = w^{(i,j)} \cos \theta^{(i,j)}, \\ v^{(i,j)} = w^{(i,j)} \sin \theta^{(i,j)}。 \end{cases} \tag{1}$$

二、准调和分潮有关要素的计算

这一节将对每组子序列 $i = 1, 2, \cdots, N$，计算出观测开始日期的 0 时，24 时及 48 时的天文变量值。后面给出的公式 (2)—(12) 根据文献 [1]，不过在计算准调和分潮 S_2 的有关要素时，进一步考虑了辐射潮 S_2 的影响。式 (13)—(15) 根据文献 [2] (并参看下一节)。在本节中，$\tilde{a}_k$ 和 $\tilde{b}_k$ 的意义是

$$\begin{cases} \tilde{a}_1 = D_{O_1} \cos d_{O_1}, & \tilde{a}_3 = D_{k_1} \cos d_{k_1}, & \cdots, & \tilde{a}_{11} = D_{Ms_4} \cos d_{Ms_4}, \\ \tilde{a}_2 = D_{O_1} \sin d_{O_1}, & \tilde{a}_4 = D_{k_1} \sin d_{k_1}, & \cdots, & \tilde{a}_{12} = D_{Ms_4} \sin d_{Ms_4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{b}_1 = D_1 \cos d_1, & \tilde{b}_3 = D_2 \cos d_2, & \tilde{b}_5 = D_4 \cos d_4, \\ \tilde{b}_2 = D_1 \sin d_1, & \tilde{b}_4 = D_2 \sin d_2, & \tilde{b}_6 = D_4 \sin d_4。 \end{cases}$$

这里给出的关于辐射潮影响的估计系基于如下的考虑:

Munk 和 Cartwright (1966)，Cartwright (1968) 及 Zetler (1971) 等都曾指出实际潮汐中存在着辐射潮分量，他们的分析结果表明，辐射潮的主要分量与 S_2 分潮频率相同，大小接近后者的 20%。因此严格地讲，实际分析所得的 S_2 分潮是重力潮和辐射潮的合成。这样看来，在计算准调和分潮 S_2 的有关要素时，引进辐射潮具有一定意义。但是目前对辐射潮的了解还只局限于少数地区，不足以直接建立它与重力潮之间的一般关系。不过，我们知道，引起重力潮 S_2 的基本因素是引潮力 S_2 的水平分力，引起辐射潮 S_2 的基本因素是大气压力波 $S_2(p)$，而我们对 $S_2(p)$ 的全球性分布已有了一定的了解，因此在下面试图建立两者的近似关系。

作用在单位体积海水上的引潮力 S_2 的南向分量和西向分量分别为 (见 Schureman, 1941):

$$\begin{cases} F_s = \dfrac{3}{2} \rho g U C \sin\phi \cos\phi \cos 2\tau, \\ F_w = \dfrac{3}{2} \rho g U C \cos\phi \sin 2\tau, \end{cases} \tag{a}$$ [1]

式中 ρ 为海水密度，大约地可取作 1.027 克·厘米$^{-3}$；g 为重力加速度，近似等于 980 厘米·秒$^{-2}$；$U = \dfrac{M}{E}\left(\dfrac{a}{c}\right)^3 = 0.558 \times 10^{-7}$；$C = 0.4227$；$\tau$ 为以角度表示的地方平太阳时；ϕ 为地理纬度。将以上这些数值代入后，上式可写作

$$\begin{cases} F_s = D_s P_2^1 \cos 2\tau, & D_s = 0.119 \times 10^{-4} \text{ 达因·厘米}^{-3}, \\ F_w = D_w P_2^1 \sin 2\tau, & D_w = 0.356 \times 10^{-4} \text{ 达因·厘米}^{-3}, \end{cases} \tag{b}$$

式中 P_1^1 和 P_2^1 为缔合 Legendre 函数 P_l^m 中当 $m = 1$, $l = 1, 2$ 时的两项[2]。

1) 为了实际应用方便，对于分析过程中用到的公式用(1)，(2)，…编号，而说明性叙述中用到的公式则用(a)，(b)，…编号。

2) $m = 1$ 时，各缔合 Legendre 函数如下：$P_1^1 = \cos\phi$，$P_2^1 = 3\cos\phi\sin\phi$，$P_3^1 = \dfrac{3}{2}\cos\phi(5\sin^2\phi - 1)$，$P_4^1 = \dfrac{5}{2}\cos\phi(7\sin^3\phi - 3\sin\phi)$，…。

根据 Haurwitz (1956) 的统计，全球太阳半日气压分波 $S_2(p)$ 可用下面近似式表示:

$$p = A\cos^3\phi\cos(2\tau - \alpha) + BP_2\cos(2\tau - 2L - \beta), \tag{c}$$

其中 $A = 1.16$ 毫巴 $= 1160$ 达因·厘米$^{-2}$，$B = 0.085$ 毫巴 $= 85$ 达因·厘米$^{-2}$，$\alpha = -68°$，$\beta = -28°$，L 为地理经度，$P_2 = \frac{1}{2}(3\sin^2\phi - 1)$ 为 Legendre 多项式。上式第一项代表一个自东向西的行波，这一点与引潮势一样，所不同的只是系数的地理分布有不大的差异，且它的位相与引潮势不一样。第二项代表一个驻波，显然，海洋对它的响应与对行波的响应会完全不同，而且这一项比第一项小得多，故以后将不予考虑。由第一项引起的压力梯度力的向南和向西的分量分别为

$$\begin{cases} f_s = -\dfrac{\partial p}{a\partial(-\phi)} = \dfrac{\partial p}{a\partial\phi} = -\dfrac{3A}{a}\sin\phi\cos^2\phi\cos(2\tau - \alpha), \\ f_w = -\dfrac{\partial p}{a\cos\phi\partial(-L)} = \dfrac{\partial p}{a\cos\phi\partial\tau} = -\dfrac{2A}{a}\cos^2\phi\sin(2\tau - \alpha), \end{cases} \tag{d}$$

这里 a 为地球半径，平均为 0.637×10^9 厘米。

为了与引潮力比较，我们将式 (d) 中与地理纬度 ϕ 有关的因子按缔合 Legendre 函数 $P_l^1(l = 1, 2, \cdots)$ 展开，得到

$$\begin{cases} f_s = -\dfrac{3A}{a}\left(\dfrac{5\pi}{64}P_2^1 - \dfrac{27\pi}{2048}P_4^1 + \cdots\right)\cos(2\tau - \alpha), \\ f_w = -\dfrac{2A}{a}\left(\dfrac{9\pi}{32}P_1^1 - \dfrac{7\pi}{256}P_3^1 + \cdots\right)\sin(2\tau - \alpha)。 \end{cases} \tag{e}$$

容易看出，(e) 中两个式子的右边第二项都远小于第一项，我们只保留第一项，并将 A 和 a 的数值代入，可得

$$\begin{cases} f_s = K_sP_2^1\cos[2\tau - (\alpha + 180°)], \quad K_s = 0.133 \times 10^{-5} \text{ 达因·厘米}^{-3}, \\ f_w = K_wP_1^1\sin[2\tau - (\alpha + 180°)], \quad K_w = 0.322 \times 10^{-5} \text{ 达因·厘米}^{-3}。 \end{cases} \tag{f}$$

比较式 (f) 和 (b)，知 $K_s/D_s = 0.112$，$K_w/D_w = 0.90$，我们以 κ 记这两个数的平均值，$\kappa = 0.101$，且令 $\gamma = \alpha + 180° = 112°$，则略去小项后，气压波的压力梯度力可写成

$$\begin{cases} f_s = \kappa D_sP_2^1\cos(2\tau - \gamma), \\ f_w = \kappa D_wP_1^1\sin(2\tau - \gamma)。 \end{cases} \tag{g}$$

由此可看出，略去一些小项后，气压波 $S_2(p)$ 的主要项所造成的压力梯度力与 S_2 水平引潮力分布相似，只是其大小是后者的 0.101 倍，相角落后 112°。

这两种力的合力则是

$$\begin{cases} F_s + f_s = \mu D_sP_2^1\cos(2\tau - \delta), \\ F_w + f_w = \mu D_wP_1^1\sin(2\tau - \delta), \end{cases} \tag{h}$$

其中 $\mu\cos\delta = 1 + \kappa\cos\gamma$，$\mu\sin\delta = \kappa\sin\gamma$，将 $\kappa = 0.101$，$\gamma = 112°$ 代入，得 $\mu = 0.967$，$\delta = 5.°6$。这说明气压波 $S_2(p)$ 能够使重力潮 S_2 减弱大约 1/30，位相推迟 5.°6。

郑文振 (1959，内部交流)曾察觉到通常调和分析所得 S_2 分潮的迟角常比 K_2 的迟角大，而不是如原来期望的那样前者比后者小 (见 Schureman，1941，p. 79，假定潮龄为正)。从上面的讨论可以看出，这种异常现象可以用气压波 $S_2(p)$ 引起重力潮 S_2 迟角的增

大这个事实来解释。

尽管 Munk 和 Cartwright (1966) 引入太阳辐射势，且 Cartwright 和 Taylor (1971) 进一步将其展开，得到角速率与 S_2, K_2 等相同的项，但实际大气压力波 $K_2(p)$ 分量的情况迄今没有很好地研究过，所以我们很难对潮汐中的辐射潮 K_2 作出估计。另外，重力潮 K_2 主要是太阳引潮力引起的，故它受到辐射潮 K_2 的影响自然要比 S_2 受到的影响小得多。因此下面在给出准调和分潮的有关要素的计算式时，只考虑 $S_2(p)$ 的影响。

在考虑了辐射潮 S_2 之后，文献 [1] 式 (23) 和 (24) 将增加一个子分潮 S_{2d}，且有 $D'_{S_{2d}}=0.101$，$d'_{S_{2d}}=112°$。而修正后的文献 [1] 式 (29) 则为

$$\begin{cases} 0.967D'_{S_2}\cos(d'_{S_2}+5.°6)=\sum\limits_{v=a,b,c,d} D'_{S_{2v}}\cos d'_{S_{2v}}, \\ 0.967D'_{S_2}\sin(d'_{S_2}+5.°6)=\sum\limits_{v=a,b,c,d} D'_{S_{2v}}\sin d'_{S_{2v}}, \end{cases}$$

或者，

$$\begin{cases} D'_{S_2}\cos d'_{S_2}=1.034\sum\limits_{v=a,b,c,d} D'_{S_{2v}}\cos(d'_{S_{2v}}-5.°6), \\ D'_{S_2}\sin d'_{S_2}=1.034\sum\limits_{v=a,b,c,d} D'_{S_{2v}}\sin(d'_{S_{2v}}-5.°6)。 \end{cases} \tag{i}$$

下面我们给出各准调和分潮有关要素的计算公式。

第 i 组子序列观测开始日期 0 时的天文变量值由下列公式 (2)—(15) 计算：

1. 计算基本天文元素 s, h, p, N, p_S (适用于 1901—2100 年)

$$\begin{cases} s=4.834\ 99+2.258\ 1909(y^{(i)}-1900)+0.229\ 971\ 6\left(D^{(i)}+l^{(i)}-\dfrac{T}{24}\right), \\ h=4.890\ 23-0.004\ 1664(y^{(i)}-1900)+0.017\ 202\,8\left(D^{(i)}+l^{(i)}-\dfrac{T}{24}\right), \\ p=5.836\ 12+0.709\ 6943(y^{(i)}-1900)+0.001\ 9443\left(D^{(i)}+l^{(i)}-\dfrac{T}{24}\right), \\ N=4.523\ 14-0.337\ 3404(y^{(i)}-1900)-0.000\ 9242\left(D^{(i)}+l^{(i)}-\dfrac{T}{24}\right), \\ p_S=4.908\ 23+0.000\ 2993(y^{(i)}-1900)+0.000\ 0009\left(D^{(i)}+l^{(i)}-\dfrac{T}{24}\right), \end{cases} \tag{2}$$

式中 $l^{(i)}$ 为 1901 至 $y^{(i)}$ 年的闰年数，即

$$l^{(i)}=0.25(y^{(i)}-1901)\ 之整数部分； \tag{3}$$

$D^{(i)}$ 为观测开始日期的日期序数（以每年的 1 月 1 日为 0，1 月 2 日为 1，…），它可由 $(d^{(i)}-1)$ 加上 $m^{(i)}$ 月 1 日的日期序数而得。各月 1 日的日期序数和月份的关系见表

表 1 各月 1 日的日期序数

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平年	0	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
闰年	0	31	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335

1，其中平年或闰年可由 $y^{(i)}$ 来判断，对于 20 和 21 世纪，若 $y^{(i)}$ 能被 4 整除则为闰年，否则为平年。

2. 计算 λ_S, c_S/r_S, λ, c/r, I, ν, ξ

$$\left\{\begin{aligned}
\lambda_S &= h + 0.0335\sin(h-p_S) + 0.0004\sin 2(h-p_S),\\
c_S/r_S &= 1 + 0.0168\cos(h-p_S) + 0.0003\cos 2(h-p_S),\\
\lambda &= s + 0.1098\sin(s-p) + 0.0038\sin 2(s-p)\\
&\quad + 0.0204\sin(s-2h+p) + 0.0108\sin 2(s-h),\\
c/r &= 1 + 0.0548\cos(s-p) + 0.0030\cos 2(s-p)\\
&\quad + 0.0093\cos(s-2h+p) + 0.0078\cos 2(s-h),\\
\mathrm{I} &= \cos^{-1}(0.91369 - 0.03569\cos N),\\
\nu &= \sin^{-1}(0.08968\sin N/\sin\mathrm{I}),\\
\xi &= \sin^{-1}[(0.91739 - 0.01788\cos N)\sin\nu].
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

3. 计算 D', d'

$$\left\{\begin{aligned}
D'_{O_1} &= 2.6518(c/r)^3\sin\mathrm{I}\cos^2\frac{\mathrm{I}}{2},\\
D'_{k_{1a}} &= 0.9425(c/r)^3\sin 2\mathrm{I},\\
D'_{k_{1b}} &= 1.8850(c/r)^3\sin\mathrm{I}\sin^2\frac{\mathrm{I}}{2},\\
D'_{k_{1c}} &= 0.3310(c_S/r_S)^3,\\
D'_{k_{1d}} &= 0.3167(c_S/r_S)^3,\\
D'_{k_{1e}} &= 0.0143(c_S/r_S)^3,\\
D'_{M_2} &= 1.1007(c/r)^3\cos^4\frac{\mathrm{I}}{2},\\
D'_{S_{2a}} &= 1.1829(c/r)^3\sin^2\mathrm{I},\\
D'_{S_{2b}} &= 1.0007(c_S/r_S)^3,\\
D'_{S_{2c}} &= 0.0862(c_S/r_S)^3,\\
D_{S_{2d}} &= 0.101;
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned}
d'_{O_1} &= 2\lambda - h + \nu - 2\xi + \frac{\pi}{2},\\
d'_{k_{1a}} &= -h + \nu - \frac{\pi}{2},\\
d'_{k_{1b}} &= -2\lambda - h + \nu + 2\xi - \frac{\pi}{2},\\
d'_{k_{1c}} &= 2\lambda_S - h + \frac{\pi}{2},\\
d'_{k_{1d}} &= -h - \frac{\pi}{2},\\
d'_{k_{1e}} &= -2\lambda_S - h - \frac{\pi}{2},\\
d'_{M_2} &= 2\lambda - 2h + 2\nu - 2\xi,\\
d'_{S_{2a}} &= -2h + 2\nu,
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

$$\begin{cases} d'_{S_{2b}} = 2\lambda_S - 2h, \\ d'_{S_{2c}} = -2h, \\ d'_{S_{2d}} = 1.955。\end{cases}$$

4. 计算各准调和分潮的天文变量

$$O_1: \begin{cases} \tilde{a}_1 = (\cos 0.01845T)D'_{O_1}\cos d'_{O_1} - (\sin 0.01845T)D'_{O_1}\sin d'_{O_1}, \\ \tilde{a}_2 = (\sin 0.01845T)D'_{O_1}\cos d'_{O_1} + (\cos 0.01845T)D'_{O_1}\sin d'_{O_1}; \end{cases} \tag{7}$$

$$K_1: \begin{cases} \tilde{a}_3 = (\cos 0.00072T)\sum\limits_{v=a,b,c,d,e} D'_{k_{1v}}\cos d'_{k_{1v}} \\ \qquad + (\sin 0.00072T)\sum\limits_{v=a,b,c,d,e} D'_{k_{1v}}\sin d'_{k_{1v}}, \\ \tilde{a}_4 = -(\sin 0.00072T)\sum\limits_{v=a,b,c,d,e} D'_{k_{1v}}\cos d'_{k_{1v}} \\ \qquad + (\cos 0.00072T)\sum\limits_{v=a,b,c,d,e} D'_{k_{1v}}\sin d'_{k_{1v}}; \end{cases} \tag{8}$$

$$M_2: \begin{cases} \tilde{a}_5 = (\cos 0.01773T)D'_{M_2}\cos d'_{M_2} - (\sin 0.01773T)D'_{M_2}\sin d'_{M_2}, \\ \tilde{a}_6 = (\sin 0.01773T)D'_{M_2}\cos d'_{M_2} + (\cos 0.01773T)D'_{M_2}\sin d'_{M_2}; \end{cases} \tag{9}$$

$$S_2: \begin{cases} \tilde{a}_7 = 1.034 \sum\limits_{v=a,b,c,d} D'_{S_{2v}}\cos(d'_{S_{2v}} - 0.098), \\ \tilde{a}_8 = 1.034 \sum\limits_{v=a,b,c,d} D'_{S_{2v}}\sin(d'_{S_{2v}} - 0.098); \end{cases} \tag{10}$$

$$M_4: \begin{cases} \tilde{a}_9 = \tilde{a}_5^2 - \tilde{a}_6^2, \\ \tilde{a}_{10} = 2\tilde{a}_5\tilde{a}_6; \end{cases} \tag{11}$$

$$MS_4: \begin{cases} \tilde{a}_{11} = \tilde{a}_5\tilde{a}_7 - \tilde{a}_6\tilde{a}_8 + 0.1047(\tilde{a}_7^2 - \tilde{a}_8^2) - 0.1340(2\tilde{a}_7\tilde{a}_8), \\ \tilde{a}_{12} = \tilde{a}_5\tilde{a}_8 + \tilde{a}_6\tilde{a}_7 + 0.1340(\tilde{a}_7^2 - \tilde{a}_8^2) + 0.1047(2\tilde{a}_7\tilde{a}_8)。\end{cases} \tag{12}$$

5. 计算全日、半日和四分日合成分潮的天文变量

$$全日: \begin{cases} \tilde{b}_1 = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_3x'_1 - \tilde{a}_4y'_1, \\ \tilde{b}_2 = \tilde{a}_2 + \tilde{a}_3y'_1 + \tilde{a}_4x'_1; \end{cases} \tag{13}$$

$$半日: \begin{cases} \tilde{b}_3 = \tilde{a}_5 + \tilde{a}_7x'_2 - \tilde{a}_8y'_2, \\ \tilde{b}_4 = \tilde{a}_6 + \tilde{a}_7y'_2 + \tilde{a}_8x'_2; \end{cases} \tag{14}$$

$$四分日: \begin{cases} \tilde{b}_5 = \tilde{a}_9 + \tilde{a}_{11}x'_4 - \tilde{a}_{12}y'_4, \\ \tilde{b}_6 = \tilde{a}_{10} + \tilde{a}_{11}y'_4 + \tilde{a}_{12}x'_4, \end{cases} \tag{15}$$

其中 $x'_p = H'_p\cos g'_p$，$y'_p = H'_p\sin g'_p (p = 1, 2, 4)$。

按式 (2)—(15) 算得的 $\tilde{a}_k(k = 1, 2, \cdots, 12)$ 和 $\tilde{b}_k(k = 1, 2, \cdots, 6)$ 为第 i 组子序列观测开始日期 0 时的数值，以后将以 $\tilde{a}_k^{(i)}(0)$，$\tilde{b}_k^{(i)}(0)$ 记之。对于每个子序列，还需要算出 24 时和 48 时的这些数值，分别记以 $\tilde{a}_k^{(i)}(24)$，$\tilde{b}_k^{(i)}(24)$ 和 $\tilde{a}_k^{(i)}(48)$，$\tilde{b}_k^{(i)}(48)$，它们的计算方法与 0 时的完全相同，只需在计算基本天文元素时 [式 (2)]，将日期序数 $D^{(i)}$ 分别加上 1 和 2。

三、用引入差比关系的方法计算调和常数

由文献 [1] 式 (36)，海流的北分量(东分量及水位类似) u 可以表示为

$$
\begin{aligned}
u = U_0 &+ D_{O_1}U_{O_1}\cos\left(\frac{\pi}{12}t - d_{O1} - \xi_{O_1}\right) + D_{k_1}U_{k_1}\cos\left(\frac{\pi}{12}t - d_{k_1} - \xi_{k_1}\right) \\
&+ D_{M_2}U_{M_2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t - d_{M_2} - \xi_{M_2}\right) + D_{S_2}U_{S_2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t - d_{S_2} - \xi_{S_2}\right) \\
&+ D_{M_4}U_{M_4}\cos\left(\frac{\pi}{3}t - d_{M_4} - \xi_{M_4}\right) + D_{MS_4}U_{MS_4}\cos\left(\frac{\pi}{3}t - d_{MS_4} - \xi_{MS_4}\right), \qquad \text{(j)}
\end{aligned}
$$

其中 U_C，$\xi_C(C = O_1, K_1, \cdots, MS_4)$ 为各分潮的调和常数，U_0 为余流。

在引入差比关系的方法中，假定同一潮族的两个主要分潮的调和常数的差比数为已知，即下式中 H'_p，$g'_p(p = 1, 2, 4)$ 已知：

$$
\begin{cases}
U_{k_1}/U_{O_1} = H'_1, \; U_{S_2}/U_{M_2} = H'_2, \; U_{MS_4}/U_{M_4} = H'_4, \\
\xi_{k_1} - \xi_{O_1} = g'_1, \; \xi_{S_2} - \xi_{M_2} = g'_2, \; \xi_{MS_4} - \xi_{M_4} = g'_4\text{。}
\end{cases} \qquad \text{(k)}
$$

如引入

$$
\begin{cases}
\tilde{b}_1 = D_1\cos d_1 = D_{O_1}\cos d_{O_1} + H'_1 D_{k_1}\cos(d_{k_1} + g'_1), \\
\tilde{b}_2 = D_1\sin d_1 = D_{O1}\sin d_{O_1} + H'_1 D_{k_1}\sin(d_{k_1} + g'_1), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\tilde{b}_6 = D_4\sin d_4 = D_{M_4}\sin d_{M_4} + H'_4 D_{MS_4}\sin(d_{MS_4} + g'_4),
\end{cases} \qquad \text{(l)}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
u = U_0 &+ D_1 U_{O_1}\cos\left(\frac{\pi}{12}t - d_1 - \xi_{O_1}\right) \\
&+ D_2 U_{M_2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t - d_2 - \xi_{M_2}\right) + D_4 U_{M_4}\cos\left(\frac{\pi}{3}t - d_4 - \xi_{M_4}\right)\text{。} \qquad \text{(m)}
\end{aligned}
$$

再令

$$
\begin{cases}
x_1 = U_{O_1}\cos\xi_{O_1}, \; x_3 = U_{M_2}\cos\xi_{M_2}, \; x_5 = U_{M_4}\cos\xi_{M_4}, \\
x_2 = U_{O_1}\sin\xi_{O_1}, \; x_4 = U_{M_2}\sin\xi_{M_2}, \; x_6 = U_{M_4}\sin\xi_{M_4},
\end{cases} \qquad \text{(n)}
$$

及

$$
\begin{cases}
b_1 = D_1\cos\left(\frac{\pi}{12}t - d_1\right) = \tilde{b}_1\cos\frac{\pi}{12}t + \tilde{b}_2\sin\frac{\pi}{12}t, \\
b_2 = D_1\sin\left(\frac{\pi}{12}t - d_1\right) = \tilde{b}_1\sin\frac{\pi}{12}t - \tilde{b}_2\cos\frac{\pi}{12}t, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_6 = D_4\sin\left(\frac{\pi}{3}t - d_4\right) = \tilde{b}_5\sin\frac{\pi}{3}t - \tilde{b}_6\cos\frac{\pi}{3}t,
\end{cases} \qquad \text{(o)}
$$

则式 (m) 进一步可化为线性式：

$$
u = U_0 + \sum_{k=1}^{6} b_k x_k\text{。} \qquad \text{(p)}
$$

因为每组子序列各有一个余流值，故对于第 i 子序列的第 j 次观测，可建立一个方程：

$$
\sum_{k=1}^{6} b_k^{(i,j)} x_k + x_{6+i} = u^{(i,j)}, \qquad \text{(q)}
$$

这里为了方便，用 x_{6+i} 记第 i 组子序列的余流值 $U_0^{(i)}$。考虑到权系数，即可得到包含

$6+N$ 个未知数的，由 $m=\sum_{i=1}^{N} n^{(i)}$ 个方程所组成的矛盾方程组：

$$\sum_{k=1}^{6} w^{(i)} b_k^{(i,j)} x_k + w^{(i)} x_{6+i} = w^{(i)} u^{(i,j)}, \tag{r}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n^{(i)})。$$

这个方程组可以用最小二乘法处理，其法方程为后面的式 (20)。

在输入的观测记录中，有时由于未察觉的观测错误或仪器故障等原因，个别数据可能有特别大的误差。对这些数据若不加以适当的处理，必将给最后结果的准确性带来影响。手工计算时，通过前后数据的比较，误差特别大的数据容易被发觉。但是电子计算机处理时，必须给出一定的判断标准。观测数据是否合理，其判断方法可以是各种各样的，给出的标准总是或多或少地带有一些主观随意性。一个比较简单的标准是在通常的实验数据处理中常常采用的所谓 Chauvenet 判据[7]。但这一判据过于严格，常常把一些并非不合理的数据也舍弃掉。我们在下面将给出另一种判据。

实际观测所得的数据并不能由式 (p) 完全表达，因为数据中还包含着非潮汐的因素、观测的误差等等。我们把这部分统称为观测误差，它是随机的。我们假定它服从正态分布，平均值为零，标准差为 σ。这样，对任何一次观测，其误差的绝对值小于 $z(z>0)$ 的概率为

$$p=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_0^z e^{-x^2/2\sigma^2}dx\ 。\tag{s}$$

在第一节我们给出的观测值总共有 m 个[见式 (23)]，显然所有这 m 个观测值的误差均小于 z 的概率 p_0 应等于 p^m，即

$$p_0=\left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_0^z e^{-x^2/2\sigma^2}dx\right]^m 。$$

此式也可反过来由 p_0 确定相应的 z 值。这时，如果 p_0 接近 1，则所有 m 次观测的误差都小于 z 的可能性便很大。因此，在实际处理中，如果有一次或一次以上观测，其误差大于 z，则我们可以认为这次或这些观测数据是不合理的，应当舍弃。亦即，我们选取这样的一个正数 μ 为临界系数，它满足

$$\left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_0^\mu e^{-x^2/2\sigma^2}dx\right]^m=\left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\mu e^{-t^2/2}dt\right]^m=p_0, \tag{t}$$

若观测误差之绝对值大于 $\mu\sigma$，则这个观测数据应予舍弃。

表 2 中列出了对于不同的 p_0 值，μ 和 m 之间的关系。在这个表中，我们同时还列出 Chauvenet 判据 μ_{ch}。可以看到，当 m 较大时 μ_{ch} 和对应于 $p_0=0.6$ 的 μ 值几乎一样。这表明，m 次观测中至少有一个误差大于 $\mu_{ch}\sigma$ 的概率大约为 0.4，这不能说是一个很小的概率。我们认为在式 (t) 中取 $p_0\geqslant 0.8$ 会比较合适些。

由于直接用式 (t) 计算很不方便，并且严格地按此式计算也非必要，故我们希望采用比较简单的近似式来代替它。如果仔细地考察一下表 2，容易发现对于一定的 p_0 值，μ 值的平方差不多与 m 的对数成线性关系。因此采用

$$\mu^2=a+b\ln m+c\ln^2 m \tag{u}$$

表 2 对于不同 p_0 值,临界系数μ和观测次数 m 的关系

m \ μ \ p_0	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99	Chauvenet 判据 μ_{ch}
1	0.67	0.84	1.04	1.28	1.64	1.96	2.58	0.67
10	1.82	1.96	2.11	2.29	2.56	2.80	3.29	1.96
100	2.70	2.80	2.91	3.06	3.28	3.47	3.89	2.81
1000	3.39	3.48	3.57	3.69	3.88	4.05	4.42	3.48
10000	3.98	4.05	4.13	4.24	4.41	4.56	4.89	4.06

即可充分接近地代替式(t)。表 3 列出了上式对应各 p_0 值的系数值。采用这些系数,在 $m = 2$ 至 2×10^5 的范围内所带来的误差是可以忽略的。后面实际计算过程中[式(26)]给出的是对应于 $p_0 = 0.9$ 的近似式。

表 3 μ^2 近似式的系数值

p_0	a	b	c
0.8	1.40	1.680	0.0126
0.9	2.56	1.738	0.0096
0.95	3.75	1.776	0.0078
0.99	6.59	1.837	0.0045

对于 Chauvenet 判据也可采用类似的近似式,不过宜采用更高次的多项式,例如可以用

$$\mu_{ch} = 0.29 + 1.417 \ln m + 0.06112 \ln^2 m + 0.002535 \ln^3 m。$$

我们在后面的处理中,凡判定为"不合理"的观测数据均予舍弃,但这并不是唯一可行的办法,如果为了程序处理方便,也可用自报值代替舍弃了的数据。在观测值中舍弃了不合理数据以后,最好重新计算方差 σ^2,再判断剩下的观测值中有无不合理数据。但由于对我们这里的问题必要性不大,我们没有这样做。

引入差比关系方法的整个计算过程如下:

1. 调和常数的初算

(A) 矛盾方程组(p)的系数用下列公式(16)和(17)计算。

对于第 i 组子序列,前已算得 $\tilde{b}_k^{(i)}(0)$, $\tilde{b}_k^{(i)}(24)$ 和 $\tilde{b}_k^{(i)}(48)$ ($k = 1, 2, \cdots, 6$),根据这些数可用二次抛物线插值公式计算出 $t^{(i,j)}$ ($j = 1, 2, \cdots, n^{(i)}$) 时刻的天文变量值 $\tilde{b}_k^{(i,j)}$:

$$\tilde{b}_k^{(i,j)} = \tilde{b}_k^{(i)}(0) + \frac{\tilde{b}_k^{(i)}(24) - \tilde{b}_k^{(i)}(0)}{24} t^{(i,j)} + \frac{\tilde{b}_k^{(i)}(48) + \tilde{b}_k^{(i)}(0) - 2\tilde{b}_k^{(i)}(24)}{1152} t^{(i,j)}(t^{(i,j)} - 24)。 \tag{16}$$

然后按下式计算 $b_k^{(i,j)}$:

$$b_k^{(i,j)} = \begin{cases} \tilde{b}_k^{(i,j)} \cos\left(p \dfrac{\pi}{12} t^{(i,j)}\right) + \tilde{b}_{k+1}^{(i,j)} \sin\left(p \dfrac{\pi}{12} t^{(i,j)}\right), & (k = 1, 3, 5), \\ \tilde{b}_{k-1}^{(i,j)} \sin\left(p \dfrac{\pi}{12} t^{(i,j)}\right) - \tilde{b}_k^{(i,j)} \cos\left(p \dfrac{\pi}{12} t^{(i,j)}\right), & (k = 2, 4, 6), \end{cases} \tag{17}$$

其中 $p=1$（若 $k=1,2$），2（若 $k=3,4$）或4（若 $k=5,6$）。

（B）法方程各元素用下列公式（18）和（19）计算：

对于 $k,l=1,2,\cdots,6+N$，且 $l\geqslant k$，计算 $c_{k,l}$ 值：

$$c_{k,l}=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N}\left[(w^{(i)})^2\sum_{j=1}^{n^{(i)}}b_k^{(i,j)}b_l^{(i,j)}\right],(k,\ l=1,2,\cdots,6,\text{且}l\geqslant k),\\ (w^{(l-6)})^2\sum_{j=1}^{n^{(l-6)}}b_k^{(l-6,j)},\ (k=1,2,\cdots,6,\ l=7,8,\cdots,6+N),\\ n^{(k-6)}(w^{(k-6)})^2,\ (k=l=7,\ 8,\ \cdots,\ 6+N),\\ 0,\ (k,\ l=7,\ 8,\ \cdots,\ 6+N,\ \text{且}l>k)。\end{cases}\tag{18}$$

若 $\mathscr{D}=1$，对于 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6+N$，计算 U_k 值：

$$U_k=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N}\left[(w^{(i)})^2\sum_{j=1}^{n^{(i)}}b_k^{(i,j)}u^{(i,j)}\right],\ (k=1,2,\cdots,6),\\ (w^{(k-6)})^2\sum_{j=1}^{n^{(k-6)}}u^{(k-6,j)},\ \ (k=7,8,\cdots,6+N);\end{cases}\tag{19}$$

若 $\mathscr{D}=2$，则还需要计算 V_k 值，公式同（19），唯以 $v^{(i,j)}$ 置换 $u^{(i,j)}$。

（C）法方程具有如下形式：

$$\sum_{l=1}^{6+N}c_{k,l}x_k=U_k,\ \ (k=1,2,\cdots,6+N),\tag{20}$$

其中当 $k>l$ 时，$c_{k,l}=c_{l,k}$。这个方程可用主元素消去法或平方根法等标准程序解算。

若 $\mathscr{D}=2$，不改变上式的系数行列式，而将 x_k 和 U_k 分别换为 y_k 和 V_k，则还可以求得关于东分量的 $6+N$ 个未知数 y_k。

2. 不合理观测数据的舍弃

（A）观测误差方差值的估计。

首先根据初算所得的解自报各观测时刻的水位或海流分量，其公式为

$$\begin{cases}\hat{u}^{(i,j)}=x_{6+i}+\sum_{k=1}^{6}b_k^{(i,j)}x_k,\\ \hat{v}^{(i,j)}=y_{6+i}+\sum_{k=1}^{6}b_k^{(i,j)}y_k\ 。\end{cases}\tag{21}$$

然后计算观测误差的方差值 σ^2：

$$\sigma^2=\begin{cases}\dfrac{1}{m-N-6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n^{(i)}}(u^{(i,j)}-\hat{u}^{(i,j)})^2,\ \text{若}\ \mathscr{D}=1,\\ \dfrac{1}{m-N-6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n^{(i)}}[(u^{(i,j)}-\hat{u}^{(i,j)})^2+(v^{(i,j)}-\hat{v}^{(i,j)})^2],\text{若}\ \mathscr{D}=2,\end{cases}\tag{22}$$

式中 m 为总的观测次数：

$$m=\sum_{i=1}^{N}n^{(i)}\tag{23}$$

(B) 不合理观测数据的舍弃。

当 $\mathscr{D}=1$，对于每次观测，若其误差的平方值

$$(u^{(i,j)}-\hat{u}^{(i,j)})^2>\mu^2\sigma^2, \tag{24}$$

则认为观测值 $u^{(i,j)}$ 为不合理，此时应将这次观测的有关数据 $t^{(i,j)}$，$u^{(i,j)}$（即 $h^{(i,j)}$）及 $b_k^{(i,j)}$ 从计算过程中剔除。

当 $\mathscr{D}=2$，则应判断不等式

$$(u^{(i,j)}-\hat{u}^{(i,j)})^2+(v^{(i,j)}-\hat{v}^{(i,j)})^2>\mu^2\sigma^2 \tag{25}$$

是否成立，若成立，则应将这次观测的有关数据 $t^{(i,j)}$，$\theta^{(i,j)}$，$w^{(i,j)}$，$u^{(i,j)}$，$v^{(i,j)}$ 及 $b_k^{(i,j)}$ 全部从计算过程中剔除。舍弃了的观测数据在以后的计算过程中都将不再使用。

式(24)和(25)中的系数 μ^2 可由下式算得：

$$\mu^2=2.56+1.738\ln m+0.0096\ln^2 m\ 。 \tag{26}$$

3. 调和常数和余流的计算

将应舍弃的数据都去掉，留下的数据重新排列，此后 $n^{(i)}$ 指第 i 子序列中留下的这些观测值的个数，序号 (i, j) 均指重新排列后的序号。然后，再按式(18)—(20)算得新的一组未知数 x_k（若 $\mathscr{D}=1$）或 x_k 和 y_k（若 $\mathscr{D}=2$），以取代原来的解。

若 $\mathscr{D}=1$，潮汐调和常数按下列二式计算：

$$\begin{cases} X_{O_1}=x_1, & Y_{O_1}=x_2, \\ X_{K_1}=x_1'x_1-y_1'x_2, & Y_{K_1}=x_1'x_2+y_1'x_1, \\ X_{M_2}=x_3, & Y_{M_2}=x_4, \\ X_{S_2}=x_2'x_3-y_2'x_4, & Y_{S_2}=x_2'x_4+y_2'x_3, \\ X_{M_4}=x_5, & Y_{M_6}=x_6, \\ X_{MS_4}=x_4'x_5-y_4'x_6, & Y_{MS_4}=x_4'x_6+y_4'x_5; \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} U_C=\sqrt{X_C^2+Y_C^2}, \\ \xi_C=\begin{cases}\sin^{-1}Y_C/U_C, & 若\ X_C\geqslant 0, \\ \pi-\sin^{-1}Y_C/U_C, & 若\ X_C<0,\end{cases} \end{cases} \tag{28}$$

$$(C=O_1,\ K_1,\ \cdots,\ MS_4)。$$

相应于第 i 组子序列的日平均海面高度 $U_0^{(i)}$ 即等于 x_{6+i}。

为了方便，我们在这里采用了潮流北分量的符号。若用潮汐习惯符号，U_C 和 ξ_C 分别相当于 H_C 和 g_C，而 $U_0^{(i)}$ 一般用 A_0 或 X_0 表示。

若 $\mathscr{D}=2$，潮流北分量的调和常数仍用上列二式计算。东分量的调和常数算法也相同，但用 y_k 代替 x_k，计算结果则分别用 V_C 和 η_C 记。第 i 子序列的余流的北分量 $U_0^{(i)}$ 即等于 x_{6+i}，东分量 $V_0^{(i)}$ 等于 y_{6+i}，合成余流的流向和流速可由下式计算：

$$\begin{cases} W_0^{(i)}=\sqrt{(U_0^{(i)})^2+(V_0^{(i)})^2}, \\ \Theta_0^{(i)}=\begin{cases}\sin^{-1}V_0^{(i)}/W_0^{(i)}, & 若\ U_0^{(i)}\geqslant 0, \\ \pi-\sin^{-1}V_0^{(i)}/W_0^{(i)}, & 若\ U_0^{(i)}<0,\end{cases} \end{cases} \tag{29}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)。$$

4. 潮流椭圆要素的计算

若 $\mathscr{D}=2$，可按下列式(30)—(37)计算各分潮流的椭圆要素：

(A) 最大潮流(椭圆长半轴) W_C：

$$W_C=\frac{1}{2}(M_C+N_C), \tag{30}$$

其中

$$\begin{cases}M_C=\sqrt{U_C^2+V_C^2+2U_CV_C\sin(\xi_C-\eta_C)},\\ N_C=\sqrt{U_C^2+V_C^2-2U_CV_C\sin(\xi_C-\eta_C)}。\end{cases} \tag{31}$$

(B) 最小潮流(椭圆短半轴) w_C：

$$w_C=\frac{1}{2}|M_C-N_C|。 \tag{32}$$

(C) 椭圆率 k_C：

$$k_C=(M_C-N_C)/(M_C+N_C), \tag{33}$$

这里，若 $k_C>0$，则分潮 C 的流矢按逆时针方向旋转，否则顺时针旋转。

(D) 最大潮流出现时间 τ_C：

$$\tau_C=\begin{cases}(1/2\sigma_C)\mathrm{tg}^{-1}(B_C/A_C), & 若\ A_C>0,\ B_C\geqslant 0,\\ (1/2\sigma_C)[\mathrm{tg}^{-1}(B_C/A_C)+\pi], & 若\ A_C<0,\\ (1/2\sigma_C)[\mathrm{tg}^{-1}(B_C/A_C)+2\pi], & 若\ A_C>0,\ B_C<0,\end{cases} \tag{34}$$

式中，

$$\begin{cases}A_C=U_C^2\cos 2\xi_C+V_C^2\cos 2\eta_C,\\ B_C=U_C^2\sin 2\xi_C+V_C^2\sin 2\eta_C。\end{cases} \tag{35}$$

(E) 最大潮流方向 Θ_C：

$$\Theta_C=\begin{cases}\mathrm{tg}^{-1}(B_C'/A_C'), & 若\ A_C'>0,\ B_C'\geqslant 0,\\ \mathrm{tg}^{-1}(B_C'/A_C')+\pi, & 若\ A_C'<0,\\ \mathrm{tg}^{-1}(B_C'/A_C')+2\pi, & 若\ A_C'>0,\ B_C'<0,\end{cases} \tag{36}$$

式中，

$$\begin{cases}A_C'=U_C\cos(\sigma_C\tau-\xi_C),\\ B_C'=V_C\cos(\sigma_C\tau-\eta_C)。\end{cases} \tag{37}$$

在式(34)和(37)中，各分潮的角速率如下：$\sigma_{O_1}=0.243352$，$\sigma_{k_1}=0.262516$，$\sigma_{M_2}=0.505868$，$\sigma_{S_2}=0.523599$，$\sigma_{M_4}=1.011736$，$\sigma_{MS_4}=1.029467$。

四、用不引入差比关系的方法计算调和常数

令

$$\begin{cases}x_1=U_{O_1}\cos\xi_{O_1},\ x_3=U_{k_1}\cos\xi_{k_1},\ \cdots,\ x_{11}=U_{MS_4}\cos\xi_{MS_4},\\ x_2=U_{O_1}\sin\xi_{O_1},\ x_4=U_{k_1}\sin\xi_{k_1},\ \cdots,\ x_{12}=U_{MS_4}\sin\xi_{MS_4},\end{cases} \tag{v}$$

及

$$
\begin{cases}
a_1 = D_{O_1}\cos\left(\frac{\pi}{12}t - d_{O_1}\right) = \tilde{a}_1\cos\frac{\pi}{12}t + \tilde{a}_2\sin\frac{\pi}{12}t, \\
a_2 = D_{O_1}\sin\left(\frac{\pi}{12}t - d_{O_1}\right) = \tilde{a}_1\sin\frac{\pi}{12}t - \tilde{a}_2\cos\frac{\pi}{12}t, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{12} = D_{MS_4}\sin\left(\frac{\pi}{3}t - d_{MS_4}\right) = \tilde{a}_{11}\sin\frac{\pi}{3}t - \tilde{a}_{12}\cos\frac{\pi}{3}t,
\end{cases} \tag{w}
$$

则式 (j) 可化为线性式:

$$
u = U_0 + \sum_{k=1}^{12} a_k x_k 。 \tag{x}
$$

与式 (q) 类似,对于每次观测可建立一个方程:

$$
\sum_{k=1}^{12} a_k^{(i,j)} x_k + x_{12+i} = u^{(i,j)}, \tag{y}
$$

式中 $x_{12+i} \equiv U_0^{(i)}$。考虑到权,则可得到包含 $12+N$ 个未知数的由 m 个方程组成的矛盾方程组:

$$
\sum_{k=1}^{12} w^{(i)} a_k^{(i,j)} x_k + w^{(i)} x_{12+i} = w^{(i)} u^{(i,j)}, \tag{z}
$$

$$
(i = 1, 2, \cdots, N;\ j = 1, 2, \cdots, n^{(i)})。
$$

这个方程组同样可用最小二乘法处理,它的法方程是后面的式 (41)。

由于不合理观测数据已在上节计算过程中舍弃了,这里就不需要再重复,而可直接对留下的数据进行分析。用上节和本节方法算得的结果在以后将分别简称为第一组和第二组结果。

本节的计算过程如下:

首先根据第一节给出的已知数据,统计在 N 组子序列中主要子序列的组数 N',若 $N' \geqslant 2$,则可用不引入差比关系的方法计算调和常数,否则不进行本节的计算。

1. 矛盾方程系数的计算

首先计算各 $t^{(i,j)}$ 时刻的 $\tilde{a}_k^{(i,j)}$ 值,算法基本上同 $\tilde{b}_k^{(i,j)}$,不同之处仅是在式 (16) 中以 a 代替 b,且此时 $k = 1, 2, \cdots, 12$。然后按下式计算 $a_k^{(i,j)}$:

$$
a_k^{(i,j)} = \begin{cases}
\tilde{a}_k^{(i,j)}\cos\left(p\frac{\pi}{12}t^{(i,j)}\right) + \tilde{a}_{k+1}^{(i,j)}\sin\left(p\frac{\pi}{12}t^{(i,j)}\right), & k = 1, 3, \cdots, 11, \\
\tilde{a}_{k-1}^{(i,j)}\sin\left(p\frac{\pi}{12}t^{(i,j)}\right) - \tilde{a}_k^{(i,j)}\cos\left(p\frac{\pi}{12}t^{(i,j)}\right), & k = 2, 4, \cdots, 12,
\end{cases} \tag{38}
$$

其中 $p = 1$ (若 $k = 1, 2, 3, 4$), 2 (若 $k = 5, 6, 7, 8$) 或 4 (若 $k = 9, 10, 11, 12$)。

2. 法方程各元素的计算

对于 $k, l = 1, 2, \cdots, 12 + N$ 且 $l \geqslant k$,计算 $C'_{k,l}$ 值:

$$
C'_{k,l} = \begin{cases}
\sum_{i=1}^{N}\left[(w^{(i)})^2 \sum_{j=1}^{n^{(i)}} a_k^{(i,j)} a_k^{(i,j)}\right], & (k, l = 1, 2, \cdots, 12, \text{且 } l \geqslant k), \\
(w^{(l-12)})^2 \sum_{j=1}^{n^{(l-12)}} a_k^{(l-12,j)}, & (k = 1, 2, \cdots, 12, l = 13, 14, \cdots, 12 + N),
\end{cases} \tag{39}
$$

$$\begin{cases} n^{(k-12)}(w^{(k-12)})^2, & (k=l=13,\ 14,\ \cdots,\ 12+N), \\ 0, & (k,\ l=13,\ 14,\ \cdots,\ 12+N,\ 且\ l>k)。\end{cases}$$

若 $\mathscr{D}=1$，对于 $k=1,2,\cdots,12+N$ 计算 U'_k 值：

$$U'_k=\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}\left[(w^{(i)})^2\sum_{j=1}^{n^{(i)}}a_k^{(i,j)}u^{(i,j)}\right], & (k=1,2,\cdots,12), \\ (w^{(k-12)})^2\sum_{j=1}^{n^{(k-12)}}u^{(k-12,j)}, & (k=13,14,\cdots,12+N); \end{cases} \tag{40}$$

若 $\mathscr{D}=2$，则还需要计算 V'_k 值，公式同上，只是以 $v^{(i,j)}$ 置换 $u^{(i,j)}$。

3. 求解法方程

法方程具有如下形式：

$$\sum_{l=1}^{12+N}C'_{k,l}x_l=U'_k,\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 12+N), \tag{41}$$

式中当 $k>l$，有 $C_{k,l}=C_{l,k}$。这个方程可用主元素消去法或平方根法等标准程序解算。

若 $\mathscr{D}=2$，不改变上式的系数矩阵，而将 x_k 和 U'_k 分别换为 y_k 和 V'_k，则还可求得关于东分量的 $12+N$ 个未知数 y_k。

4. 调和常数、余流及潮流椭圆要素的计算

这里的计算过程与上节式(28)—(37)完全相同，只是用到的 X, Y 值不必由式(27)计算，而直接取 $X_{O_1}=x_1$，$Y_{O1}=x_2$，$X_{k_1}=x_3$，$Y_{k_1}=x_4$，$\cdots$，$X_{MS_4}=x_{11}$，$Y_{MS_4}=x_{12}$（当 $\mathscr{D}=2$ 时，对于东分量用 y 代替 x）；同时取 $U_0^{(i)}=x_{12+i}$，$V_0^{(i)}=y_{12+i}(i=1,2,\cdots,N)$。

五、调和常数可靠性的估计

在算得调和常数之后，它们的可靠性如何是我们非常关心的一个问题。在文献[2]中，对比较简单的情况——每组子序列都是24小时等时间间隔的记录，我们讨论了分析结果的误差估计问题。对于任意观测时间的记录，要作出调和常数可靠性的准确的估计是困难的，这首先是由于法方程本身的复杂性，其次是余差所具有的性质（它的相关函数或谱的特性）很难从短期观测记录中了解到。

为了应用文献[2]的结果，我们把问题简化，认为次要子序列对结果准确度的影响不大而不予考虑。而对于主要子序列，因为它们的每一组基本上都是一次昼夜连续观测，故忽略掉所有小项之后，法方程(41)可化为文献[2]的式(23)（对引入差比关系方法情况类似）。不过后者右端的 $A_{p,i}$，$B_{p,i}$ 是用 Doodson 乘数矩阵[见文献[2]或(5)]算得的，在这里则用余弦函数作为乘数，因此文献[2]中 A_p，B_p 的方差 v_p 现要改用下面的式(54)或(55)计算。为区别起见，这里以 I_p 记之，它们代表着计算中余差对各潮族的合成振动的有效影响。它们不但与噪声（即余差）在这些频率上的强度有关，而且还受到其它频率的影响。

后面式(56)中 $\Delta_p^{(0.1)}$，$\Delta_p^{(0.2)}$ 和(57)中 Δ_p 代表潮族 p 的各调和常数分量（例如对 $\mathscr{D}=2$，$p=1$，它们是这8个分量：$U_C\cos\xi_C$，$U_C\sin\xi_C$，$V_C\cos\eta_C$，$V_C\sin\eta_C$ $C=O_1$，K_1）的误差方差的平均值。对于引入差比关系方法，为估计调和常数误差的大小，须先估计出差比数误差的大小。而实际上对每个欲进行分析的测站都作出这个估计是困难的，或至少是麻烦的。但一般来说差比数相对误差多在0.1至0.2之间。因此我们不要求每分析一站均事先对差比数的误差作出估计，而直接算出当差比数相对误差等于0.1和0.2时调和常数误差的估计值，分别记作 $\Delta_p^{(0.1)}$ 和 $\Delta_p^{(0.2)}$，以供实际使用调和常数时参考。对于不引入差比关系的方法，调和常数误差当然与差比数无关，我们以 Δ_p 记之。一般，若 $\Delta_p<\Delta_p^{(0.1)}$，以采用不引入差比关系的分析结果为宜；若 $\Delta_p>\Delta_p^{(0.2)}$，则以采用引入差比关系的分析结果较好；而当 $\Delta_p^{(0.1)}<\Delta_p<\Delta_p^{(0.2)}$，则两种方法结果的误差相差不算太大，可以任选一组结果[1)]。

在主要子序列组数不多的情况下，估计量 I_p 的可靠性比较差，因而 $\Delta_p^{(0.1)}$，$\Delta_p^{(0.2)}$ 和 Δ_p 的可靠性也比较差。特别当主要子序列组数 $N'<3$ 时，我们不能求得这些值，此时自报偏差[式(44)—(46)]和误差传播系数(即误差影响系数)可作为定性地估计调和常数误差的参考。

在给出了调和常数分量的误差估计值之后，我们就可以估计出由所得调和常数进行预报时，其预报值的标准误差。这里所谓预报值的误差指的是与由准确的调和常数进行预报的数值比较的结果，而不是与实测值比较，因为实测值中还包含着非潮汐的成份。下面式(58)—(61)给出的估计量既赋予六个分潮调和常数误差以总的概念，也可以用来判断所得调和常数的准确度是否能满足预报或其它实际使用的要求。如不能满足，则还需进一步观测，特别要选取较好的天文条件和天气条件进行观测。

关于调和常数可靠性的估计包括下列各项内容：

1. 自报偏差

(A) 各观测时刻的自报潮位或潮流的计算。

首先根据前两节求得的两组法方程的解分别自报各观测时刻的水位 $\hat{u}$(若 $\mathscr{D}=1$)或海流的北、东分量 $\hat{u}$ 和 $\hat{v}$(若 $\mathscr{D}=2$)。公式如下：

对引入差比关系的方法，

$$\begin{cases}\hat{u}^{(i,j)}=x_{6+i}+\sum\limits_{k=1}^{6}b_k^{(i,j)}x_k,\\ \hat{v}^{(i,j)}=y_{6+i}+\sum\limits_{k=1}^{6}b_k^{(i,j)}y_k;\end{cases}\tag{42}$$

对不引入差比关系的方法，

$$\begin{cases}\hat{u}^{(i,j)}=x_{12+i}+\sum\limits_{k=1}^{12}a_k^{(i,j)}x_k,\\ \hat{v}^{(i,j)}=y_{12+i}+\sum\limits_{k=1}^{12}a_k^{(i,j)}y_k。\end{cases}\tag{43}$$

---

1) 当然，也可以作出某些更明确的规定，例如视 $\Delta_p<\frac{1}{2}(\Delta_p^{(0.1)}+\Delta_p^{(0.2)})$ 是否成立而决定采用不引入或引入差比关系的分析结果。不过这种规定具有更大的主观任意性。

式 (42) 中 x_k, y_k 为引入差比关系方法的法方程的解，式(43)中 x_k, y_k 为不引入差比关系方法的法方程的解。

(B) 潮位或潮流分量的自报标准差。

按下列公式分别计算两组对应各子序列的潮位自报标准差 $\sigma_u^{(i)}$ (若 $\mathscr{D}=1$) 或潮流分量自报标准差 $\sigma_u^{(i)}$ 和 $\sigma_v^{(i)}$ (若 $\mathscr{D}=2$):

$$\left\{\begin{aligned}\sigma_u^{(i)} &= \left[\frac{1}{n^{(i)}}\sum_{j=1}^{n^{(i)}}(u^{(i,j)}-\hat{u}^{(i,j)})^2\right]^{1/2},\\ \sigma_v^{(i)} &= \left[\frac{1}{n^{(i)}}\sum_{j=1}^{n^{(i)}}(v^{(i,j)}-\hat{v}^{(i,j)})^2\right]^{1/2},\end{aligned}\right. \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)。 \tag{44}$$

(C) 潮位或流向、流速的平均偏差。

若 $\mathscr{D}=1$，按下式对各子序列计算两组潮位平均偏差：

$$\delta_h^{(i)} = \frac{1}{n^{(i)}}\sum_{j=1}^{n^{(i)}}\left|u^{(i,j)}-\hat{u}^{(i,j)}\right|。 \tag{45}$$

若 $\mathscr{D}=2$，首先计算两组自报流向、流速值：

$$\left\{\begin{aligned}\hat{w}^{(i,j)} &= [(\hat{u}^{(i,j)})^2+(\hat{v}^{(i,j)})^2]^{1/2},\\ \hat{\theta}^{(i,j)} &= \begin{cases}\sin^{-1}\hat{v}^{(i,j)}/\hat{w}^{(i,j)}, & 若\ \hat{u}^{(i,j)}\geqslant 0,\\ \pi-\sin^{-1}\hat{v}^{(i,j)}/\hat{w}^{(i,j)}, & 若\ \hat{u}^{(i,j)}<0。\end{cases}\end{aligned}\right. \tag{46}$$

然后按下式计算其平均偏差：

$$\left\{\begin{aligned}\delta_w^{(i)} &= \frac{1}{n^{(i)}}\sum_{j=1}^{n^{(i)}}\left|w^{(i,j)}-\hat{w}^{(i,j)}\right|,\\ \delta_\theta^{(i)} &= \frac{1}{n^{(i)}-\Omega^{(i)}}\sum_{j=1}^{n^{(i)}-\Omega^{(i)}}\left|\theta^{(i,j)}-\hat{\theta}^{(i,j)}\right|,\end{aligned}\right. \tag{47}$$

其中 $\Omega^{(i)}=\left[\frac{1}{6}(n^{(i)}+3)\right]$ 之整数部分，它大约地代表了弱流的个数，而 $\delta_\theta^{(i)}$ 的计算按如下步骤进行：首先计算出 $n^{(i)}$ 个 $|\theta^{(i,j)}-\hat{\theta}^{(i,j)}|$，若它大于 π，则以 $2\pi-|\theta^{(i,j)}-\hat{\theta}^{(i,j)}|$ 代替之；然后对这 $n^{(i)}$ 个值进行比较，去掉其中较大的 $\Omega^{(i)}$ 个值，最后对剩下的 $(n^{(i)}-\Omega^{(i)})$ 个值求平均。

2. 误差传播系数(即误差影响系数)

(A) 观测中间时刻天文变量值的计算。

对每个主要子序列，计算其观测中间时刻 $\bar{t}$:

$$\bar{t} = \frac{1}{n^{(i)}}\sum_{j=1}^{n^{(i)}} t^{(i,j)}。 \tag{48}$$

然后算出该时刻的天文变量 $\tilde{a}_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 12)$ 和 $\tilde{b}_k(k=1,2,\cdots,6)$ 值，分别记为 $\bar{a}_k^{(i)}$ 和 $\bar{b}_k^{(i)}$。计算公式同(16)，仅以 $(\bar{t}^{(i)},\ \bar{a}_k^{(i)})$ 或 $(\bar{t}^{(i)},\bar{b}_k^{(i)})$ 代替该式中的 $(t^{(i,j)},\ \tilde{b}_k^{(i,j)})$。

(B) 引入差比关系方法的误差传播系数。

观测误差传播系数按下式计算:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{2}(1 + H_1'^2) \Big/ \sum\limits_i [(\bar{b}_1^{(i)})^2 + (\bar{b}_2^{(i)})^2], \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{2}(1 + H_2'^2) \Big/ \sum\limits_i [(\bar{b}_3^{(i)})^2 + (\bar{b}_4^{(i)})^2], \\ \alpha_4 = \dfrac{1}{2}(1 + H_4'^2) \Big/ \sum\limits_i [(\bar{b}_5^{(i)})^2 + (\bar{b}_6^{(i)})^2], \end{cases} \tag{49}$$

式中 $\sum\limits_i = \sum\limits_{i=1}^{N'}$，表示对各主要子序列的相应量求和(下同)。

差比数误差传播系数的算式如下:

若 $\mathscr{D} = 1$,

$$\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{1}{2} U_{O_1}^2 (P_{O_1}^2 + Q_{O_1}^2 + P_{k_1}^2 + Q_{k_1}^2) \Big/ \sum\limits_i [(\bar{b}_1^{(i)})^2 + (\bar{b}_2^{(i)})^2], \\ \beta_2 = \dfrac{1}{2} U_{M_2}^2 (P_{M_2}^2 + Q_{M_2}^2 + P_{S_2}^2 + Q_{S_2}^2) \Big/ \sum\limits_i [(\bar{b}_3^{(i)})^2 + (\bar{b}_4^{(i)})^2], \\ \beta_4 = \dfrac{1}{2} U_{M_4}^2 (P_{M_4}^2 + Q_{M_4}^2 + P_{MS_4}^2 + Q_{MS_4}^2) \Big/ \sum\limits_i [(\bar{b}_5^{(i)})^2 + (\bar{b}_6^{(i)})^2], \end{cases} \tag{50}$$

式中 U_C 为用引入差比关系方法算得的调和常数，P_C, Q_C 由下式确定:

$$\begin{cases} P_{O_1} = \sum\limits_i (\bar{a}_1^{(i)}\bar{b}_1^{(i)} + \bar{a}_2^{(i)}\bar{b}_2^{(i)}), \quad Q_{O_1} = \sum\limits_i (\bar{a}_2^{(i)}\bar{b}_1^{(i)} - \bar{a}_1^{(i)}\bar{b}_2^{(i)}), \\ P_{k_1} = \sum\limits_i (\bar{a}_3^{(i)}\bar{b}_1^{(i)} + \bar{a}_4^{(i)}\bar{b}_2^{(i)}), \quad Q_{K_1} = \sum\limits_i (\bar{a}_4^{(i)}\bar{b}_1^{(i)} - \bar{a}_3^{(i)}\bar{b}_2^{(i)}), \\ P_{M_2} = \sum\limits_i (\bar{a}_5^{(i)}\bar{b}_3^{(i)} + \bar{a}_6^{(i)}\bar{b}_4^{(i)}), \quad Q_{M_2} = \sum\limits_i (\bar{a}_6^{(i)}\bar{b}_3^{(i)} - \bar{a}_5^{(i)}\bar{b}_4^{(i)}), \\ P_{S_2} = \sum\limits_i (\bar{a}_7^{(i)}\bar{b}_3^{(i)} + \bar{a}_8^{(i)}\bar{b}_4^{(i)}), \quad Q_{S_2} = \sum\limits_i (\bar{a}_8^{(i)}\bar{b}_3^{(i)} - \bar{a}_7^{(i)}\bar{b}_4^{(i)}), \\ P_{M_4} = \sum\limits_i (\bar{a}_9^{(i)}\bar{b}_5^{(i)} + \bar{a}_{10}^{(i)}\bar{b}_6^{(i)}), \quad Q_{M_4} = \sum\limits_i (\bar{a}_{10}^{(i)}\bar{b}_5^{(i)} - \bar{a}_9^{(i)}\bar{b}_6^{(i)}), \\ P_{MS_4} = \sum\limits_i (\bar{a}_{11}^{(i)}\bar{b}_5^{(i)} + \bar{a}_{12}^{(i)}\bar{b}_6^{(i)}), \quad Q_{MS_4} = \sum\limits_i (\bar{a}_{12}^{(i)}\bar{b}_5^{(i)} - \bar{a}_{11}^{(i)}\bar{b}_6^{(i)})。 \end{cases} \tag{51}$$

若 $\mathscr{D} = 2$，算法相同，仅在式(50)中以 $\dfrac{1}{4}(U_C^2 + V_C^2)$ 代替 $\dfrac{1}{2}U_C^2(C = O_1, M_2, M_4)$。

(C) 不引入差比关系方法的观测误差传播系数:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \frac{1}{2}\Big\{\sum_i [(\bar{a}_1^{(i)})^2 + (\bar{a}_2^{(i)})^2] + \sum_i [(\bar{a}_3^{(i)})^2 + (\bar{a}_4^{(i)})^2]\Big\} \\ \Big/\Big\{\sum_i [(\bar{a}_1^{(i)})^2 + (\bar{a}_2^{(i)})^2] \sum_i [(\bar{a}_3^{(i)})^2 + (\bar{a}_4^{(i)})^2] - \Big[\sum_i (\bar{a}_1^{(i)}\bar{a}_3^{(i)} \\ + \bar{a}_2^{(i)}\bar{a}_4^{(i)})\Big]^2 - \Big[\sum_i (\bar{a}_2^{(i)}\bar{a}_3^{(i)}\bar{a}_4^{(i)})\Big]^2\Big\}, \end{aligned} \tag{52}$$

γ_2, γ_4 的算式与 γ_1 相同，但要以 $\bar{a}_{k+4}$, $\bar{a}_{k+8}$ 代替上式中的 $\bar{a}_k(k = 1, 2, 3, 4)$。与第四节一样，这些数值只在 $N' \geqslant 2$ 的情况下才予计算。

3. 调和常数误差的估计

若主要子序列的组数 $N' \geqslant 3$，则可用下述方法对调和常数误差的大小作出估计。

(A) 各潮族噪声影响的估计。

用 Δu 和 Δv 记实测值与由不引入差比关系方法所得调和常数的自报值[见式(43)]之差，即

$$\begin{cases}\Delta u^{(i,j)} = u^{(i,j)} - \hat{u}^{(i,j)}, \\ \Delta v^{(i,j)} = v^{(i,j)} - \hat{v}^{(i,j)},\end{cases} \tag{53}$$

则各潮族 $(p = 1, 2, 4)$ 受噪声影响的误差方差值 I_p 可由式(54)和(55)估计。即，若 $\mathscr{D} = 1$，

$$I_p = \frac{1}{N'-2}\sum_i \frac{2}{(n^{(i)})^2}\left[\left(\sum_{j=1}^{n^{(i)}} \Delta u^{(i,j)} \cos\frac{p\pi}{12}t^{(i,j)}\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n^{(i)}} \Delta u^{(i,j)} \sin\frac{p\pi}{12}t^{(i,j)}\right)^2\right]; \tag{54}$$

若 $\mathscr{D} = 2$，

$$\begin{aligned}I_p = \frac{1}{N'-2}\sum_i \frac{1}{(n^{(i)})^2}\Bigg[&\left(\sum_{j=1}^{n^{(i)}} \Delta u^{(i,j)} \cos\frac{p\pi}{12}t^{(i,j)}\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n^{(i)}} \Delta u^{(i,j)} \sin\frac{p\pi}{12}t^{(i,j)}\right)^2 \\ &+ \left(\sum_{j=1}^{n^{(i)}} \Delta v^{(i,j)} \cos\frac{p\pi}{12}t^{(i,j)}\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n^{(i)}} \Delta v^{(i,j)} \sin\frac{p\pi}{12}t^{(i,j)}\right)^2\Bigg]。\end{aligned} \tag{55}$$

(B) 调和常数分量误差的平均标准差的估计。

对引入差比关系方法采用下式估计：

$$\begin{cases}\Delta_p^{(0.1)} = [\alpha_p I_p + \beta_p(0.1H'_p)^2]^{1/2}, & \text{(差比数相对误差为 0.1)}, \\ \Delta_p^{(0.2)} = [\alpha_p I_p + \beta_p(0.2H'_p)^2]^{1/2}, & \text{(差比数相对误差为 0.2)}。\end{cases} \tag{56}$$

对不引差比关系方法采用下式估计：

$$\Delta_p = \sqrt{\gamma_p I_p}。 \tag{57}$$

4. 由分析所得调和常数进行预报时误差大小的估计

由分析所得调和常数进行预报时，预报值的标准误差(当 $\mathscr{D} = 1$，指潮位差的均方根；当 $\mathscr{D} = 2$，指潮流矢量差长度的均方根)如下：

(A) 误差：

引入差比关系方法，

$$\begin{cases}e^{(0.1)} = \left[2\mathscr{D}\sum_{p=1,2,4}(\Delta_p^{(0.1)})^2\right]^{1/2}, & \text{(差比数相对误差为 0.1)}, \\ e^{(0.2)} = \left[2\mathscr{D}\sum_{p=1,2,4}(\Delta_p^{(0.2)})^2\right]^{1/2}, & \text{(差比数相对误差为 0.2)};\end{cases} \tag{58}$$

不引入差比关系方法，

$$e = \left[2\mathscr{D}\sum_{p=1,2,4}\Delta_p^2\right]^{1/2}。 \tag{59}$$

(B) 相对误差：

引入差比关系方法，当 $\mathscr{D} = 1$，

$$\begin{cases}\kappa^{(0.1)} = e^{(0.1)}\Big/\left[\dfrac{1}{2}\sum\limits_{C} U_C^2\right]^{1/2}, & \text{(差比数相对误差为 0.1)},\\ \kappa^{(0.2)} = e^{(0.2)}\Big/\left[\dfrac{1}{2}\sum\limits_{C} U_C^2\right]^{1/2}, & \text{(差比数相对误差为 0.2)};\end{cases} \tag{60}$$

不引入差比关系方法，

$$\kappa = e\Big/\left[\frac{1}{2}\sum_{C} U_C^2\right]^{1/2}。 \tag{61}$$

当 $\mathscr{D} = 2$，则上两式中以 $(U_C^2 + V_C^2)$ 代替 U_C^2。式中 $\sum\limits_{C}$ 代表对六个准调和分潮的有关量求和。在式(60)中用第一组调和常数，式(61)中用第二组调和常数。

附录　主要符号

C (附标)	表示分潮；
D_C，d_C	分潮 C 的振幅系数和天文迟角；
$\mathscr{D}$	欲分析的资料的维数；
e，κ	六个准调和分潮预报误差的标准差及其相对误差；
g'_p，H'_p	潮族 p 的两个主要分潮调和常数的差比较(迟角差和振幅比)；
$h^{(i,j)}$	时刻 $t^{(i,j)}$ 的实测潮高(计算中相当于 $u^{(i,j)}$)；
I_p	潮族 p 误差的方差值；
i (附标)	观测记录子序列的序号；
j (附标)	子序列中各次观测的序号；
m	总观测次数；
N，N'	子序列和主要子序列的组数；
$n^{(i)}$	第 i 子序列的观测次数；
p (附标)	表示潮族；
s，h，p，N，p_s	月亮、太阳、月亮近地点、白道升交点、太阳近地点的平均经度；
T	视差潮龄；
$t^{(i,j)}$	第 i 组子序列的第 j 次观测的时间；
$\bar{t}^{(i,j)}$	第 i 组子序列的中间观测时刻；
$u^{(i,j)}$，$\hat{u}^{(i,j)}$，$\Delta u^{(i,j)}$	时刻 $t^{(i,j)}$ 的海流北分量(当 $\mathscr{D} = 2$)或潮位(当 $\mathscr{D} = 1$)的实测值、自报值以及它们之差；
$v^{(i,j)}$，$\hat{v}^{(i,j)}$，$\Delta v^{(i,j)}$	与上面相应的海流东分量；
U_C	潮流北分量(当 $\mathscr{D} = 2$)或潮汐(当 $\mathscr{D} = 1$)的分潮 C 的调和常数——振幅；
V_C	与上面相应的潮流东分量调和常数；
$U_0^{(i)}$	第 i 子序列余流北分量(当 $\mathscr{D} = 2$)或日平均水位(当 $\mathscr{D} = 1$)；
$V_0^{(i)}$	第 i 子序列余流东分量；
$W_0^{(i)}$，$\Theta_0^{(i)}$	第 i 子序列余流的流速和流向；
$w^{(i)}$	第 i 子序列的权系数；
$w^{(i,j)}$，$\theta^{(i,j)}$，$\hat{w}^{(i,j)}$，$\hat{\theta}^{(i,j)}$	时刻 $t^{(i,j)}$ 的实测和自报的海流流速和流向；

W_C, w_C, k_C, τ_C, Θ_C	分潮 C 的潮流椭圆要素；
x_k, y_k	关于北、东分量的法方程的解；
x'_p, y'_p	$=H'_p\cos g'_p$, $H'_p\sin g'_p$；
$y^{(i)}$, $m^{(i)}$, $d^{(i)}$, $D^{(i)}$, $l^{(i)}$	第 i 子序列的第一次观测的年份、月份、日期、日期序数及从 1900 年到 $y^{(i)}$ 年(不包括 $y^{(i)}$ 年)的闰年数；
α_p, β_p	潮族 p 引入差比关系方法的观测误差和差比数误差的传播系数；
γ_p	潮族 p 不引入差比关系方法的观测误差传播系数；
Δ_p	潮族 p 调和常数分量误差的平均标准差；
$\delta_h^{(i)}$, $\delta_w^{(i)}$, $\delta_\theta^{(i)}$	第 i 子序列潮高、流速、流向的自报和实测的平均偏差；
μ	判断观测数据是否合理的临界系数；
ξ_C	潮流北分量(当 $\mathscr{D}=2$) 或潮汐(当 $\mathscr{D}=1$) 的分潮 C 的调和常数——迟角；
η_c	与上面相应的潮流东分量调和常数；
σ_C	分潮 C 的角速率；
$\sigma_u^{(i)}$	第 i 子序列海流北分量(当 $\mathscr{D}=2$) 或水位(当 $\mathscr{D}=1$) 自报和实测之差的标准差；
$\sigma_v^{(i)}$	与上面相应的海流东分量的有关量值；
σ^2	观测误差的方差。

参 考 文 献

[1] 方国洪，1974。潮汐分析和预报的准调和分潮方法，I. 准调和分潮。海洋科学集刊 9：1—15。

[2] 方国洪，1976。潮汐分析和预报的准调和分潮方法，II. 短期观测的分析。海洋科学集刊 11：33—56。

[3] Cartwright, D. E., 1968. A unified analysis of tides and surges round North and East Britain. *Phil. Trans. Roy. Soc.* Ser. A 263: 1—55.

[4] Cartwight, D. E. and R. J. Taylor, 1971. New computations of tide-generating potential. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 23: 45—74.

[5] Haurwitz, B., 1956. The geographical distribution of the solar semidiurnal pressure oscillation. *Meteorol. Pap. New York University.* 2(5).

[6] Munk, W. H. and D. E. Cartwright, 1966. Tidal spectroscopy and prediction. *Phil. Trans. Roy. Soc.* Ser. A 259: 533—81.

[7] Parratt, L. G., 1961. Probability and Experimental Errors in Science. John Wiley & Sons Inc. pp. 176—178.

[8] Schureman, P., 1941. Manual of the Harmonic Analysis and Prediction of Tides. revised edition. U. S. Coast and Geodetic Survey. pp. 27, 79, 162, 166.

[9] Zetler, B. D., 1971. Radiational ocean tides along the coasts of United States. *J. Phys. Oceangr.* 1(1): 34—38.

QUASI-HARMONIC CONSTITUENT METHOD FOR ANALYSIS AND PREDICTION OF TIDES

III. A PRACTICAL PROCEDURE FOR ANALYSING TIDAL STREAMS AND TIDAL ELEVATIONS*

Fang Guohong

(*Institute of Oceanology, Academia Sinica*)

ABSTRACT

A practical procedure is proposed for the analysis of short period observations of tidal streams and tidal elevations using the electronic computers. The observational series to be analysed consists of several subseries. In general, the period of the subseries should be about a whole day, though the incomplete, fragmental or even individual records may also be used in the analysis. But as many (at least one) complete subseries as possible should be used so as to get reliable harmonic constants. The estimation of the errors of the harmonic constants can also be given if three or more complete subseries are available. In this paper, the formulas numbered (1), (2), ... are provided for the use of practical analysis and those labeled (a), (b), ... are given in the explanations.

To take the radiational tide into account, the effect of the solar semidiurnal atmospheric pressure wave $S_2(p)$ on ocean tides is discussed. The comparison between the horizontal pressure gradient of $S_2(p)$ and S_2 component of horizontal tide-generating force gives an estimation that the radiational tide S_2 can reduce the amplitude and delay the phase of the gravitational tide S_2 to the extents of 1/30 and 5.6° respectively.

To reject the observations with large deviations from the normal values, a criterion is suggested.

*Contribution No. 507 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.